Aufgabe:

Ein senkrecht nach unten abgeworfener Körper befinde sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ auf der Senkrechten im durch $s_0 = 0$ bezeichneten Punkt.
Die Geschwindigkeit des Körpers an diesem durch s_0 bezeichneten Punkt betrage v_0.

Gegeben sei nun ein zweiter durch s_1 gegebener Punkt P_1 unterhalb von P_0.
Die Gravitation darf als konstant angenommen werden, habe den positiven Wert g und wirke nach unten.

Dabei gelte folgende Gleichung
$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Der Körper falle also ungebremst und nur durch die Gravitation beschleunigt nach unten.

a) Welche Vorzeichen haben die Werte v_0 und s_1 aufgrund der Aufgabenstellung?

b) Zu welchem Zeitpunkt t_1 (Es gelte: $t_1 > t_0$) passiert der Körper den Punkt P_1?

c) Weshalb ist die in Teilaufgabe b) gefundene Lösung nach Aufgabenstellung eindeutig und lösbar?

d) Kehren sie das in Teilaufgabe a) gefundene Vorzeichen des (wieder unbekannten) Werts von v_0 um und geben sie an, unter welchen Bedingungen es zwei (der Aufgabe entsprechenden) Lösungen gibt und wann keine.
Begründen Sie ihre Ergebnisse physikalisch und aufgrund der Herleitung.

Lösung:

a) Nachdem der Körper nach unten in Wirkrichtung der Gravitation abgeworfen wird, müssen die Einzelfaktoren $v_0 \cdot t$ und $-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ auch dieselben Vorzeichen haben (versuche es dir bildlich vorzustellen).

Da g positiv sein soll, muss der Faktor $-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ negativ sein. Die Zeit t_1 ist aufgrund der Vorgaben positiv.

Damit der Faktor $v_0 \cdot t$ ebenfalls negativ wird, muss v_0 negativ sein.

Weil die Zeit t_1 laut Vorgabe positiv ist, liefert die RHS (right hand side) $v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ nun garantiert einen negativen Wert. Daraus folgt sofort, dass $s_1 < s_0$.
Weil $s_0 = 0$ gilt, muss also s_1 negativ sein.

b) Wir stellen unschwer fest, dass es sich bei der Vorgabe um eine quadratische Gleichung handelt.
Zunächst bringen wir die Gleichung in die allgemeine Form und stellen sie dazu ein wenig um:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - v_0 \cdot t + s = 0$$

Quadratische Gleichungen dieser Form lassen sich sehr leicht mir der **Mitternachtsformel** (auch a-b-c-Formel genannt) lösen.

Ganz allgemein sagt die Mitternachtsformel folgendes aus:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \overset{Mitternachtsformel}{\Rightarrow} \quad \mathrm{x}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}, \; a \neq 0$$

Diese Formel mag seltsam erscheinen, aber quadratische Gleichungen haben nun mal immer zwei Lösungen – Oder allgemeiner gesagt, die Anzahl der Lösungen entspricht der Ordnung des zugrunde liegenden Polynoms – Hier haben wir eine quadratische Gleichung, das Polynom hat also den Grad 2 - Also auch zwei (theoretische) Lösungen.

Ja und was ist die komische Notation mit $x_{1,2}$ und was bedeutet $\pm$?
Ganz einfach, es ist nur eine Vereinfachung der Schreibweise. Das „$x_{1,2}$“ bedeutet, dass es zwei Lösungen gibt und zwar x_1 und x_2.
Das „$\pm$“ bedeutet, dass man (um beide Lösungen zu erhalten) beides soll – Einmal addieren und einmal subtrahieren.

Man sollte hier aber dazu sagen, dass es bei polynomiellen Gleichungen auch Doppel- bzw. Mehrfachlösungen geben kann. Im gezeigten Beispiel kommt das vor, wenn die Diskriminante ($b^2 - 4 \cdot a \cdot c$) zu Null wird – Dann gilt $x_1 = x_2$! Das $\pm$ ist lediglich der Hinweis, wie man aus der sonst aussehenden RHS zwei Ergebnisse rausbekommt – Z.B bei x_1 addieren und bei x_2 subtrahieren. Nach Konvention macht man es so, dass man die Reihenfolgen einhält – In unserem Fall ist das aber egal.

Lange Rede kurzer Sinn, auch wenn sich unsere allgemeine angegebene physikalische Gleichung von den Bezeichnungen der Ausgangsformel der Mitternachtsformel etwas unterscheidet, so sind beide Formen dennoch sehr ähnlich.

Wichtig ist lediglich, dass die einzelnen Potenzen unserer Laufvariablen isoliert stehen und nur direkt einem anderen Faktor zugeordnet werden können. Man spricht hier nicht von Faktoren sondern von Koeffizienten. Ja ja, das Fachchinesisch hat schon seinen Sinn, man will ja Eindeutigkeit!

Offensichtlich sind hier x (in der Mitternachtsformel) und t (in der vorgegebenen physikalisch begründeten Gleichung) die Laufvariablen und haben eine ähnliche Bedeutung – Damit müssen *a*, *b*, und *c* bzw. $\frac{1}{2} \cdot g$, $-v_0$ und $+s$ unsere Koeffizienten sein.

Also muss gelten:

$$a = \frac{1}{2} \cdot g\,,\ b = -v_0\,,\ c = s$$

Wir machen nun eine so genannte Substitution – Oder in einfacheren Worten, wir setzen das Klump einfach in die Mitternachtsformel ein. Damit sieht das Mischmasch nun plötzlich so aus:

$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{(-v_0)^2 - 2 \cdot g \cdot s}}{g}\ ,\ \mathrm{g} \neq 0$$

Feine Sache, wenn da nicht noch die Sache mit *x* und *t* wäre. Tatsächlich wäre es zu früh zu behaupten, dass es eine eindeutige Zuordnung vom eindeutig gesuchten t_1 zu einer der beiden Lösungen der Gleichung gibt.

Auch, wenn ich da der Lösung zu Teilaufgabe c) schon etwas vorweg greifen muss, aber um Teilaufgabe b) zu lösen, muss ich das.

Es gibt zwei Lösungen der rein mathematischen Gleichung und zwangsläufig muss der Ausdruck bzw. die Diskriminante $v_0^{\ 2} - 2 \cdot g \cdot s$ (nach Teilaufgabe a) positiv sein, d.h. die Wurzel muss deshalb real (im Gegensatz zu „imaginär“) sein – D.h. exakt **eine** genau bestimmte stinknormale Zahl, die sogar positiv ist.

Nachdem auch der Ausdruck $-2 \cdot g \cdot s$ (weil in Teilaufgabe a) schon festgestellt wurde, dass s_1 negativ ist) positiv sein muss, muss unter diesen Voraussetzungen (im Bereich der reellen Zahlen) auch gelten, dass gilt:

$v_0 < \sqrt{v_0^{\ 2} - 2 \cdot g \cdot s}$ - Somit muss der Ausdruck $v_0 - \sqrt{v_0^{\ 2} - 2 \cdot g \cdot s}$ sicher ein negatives Ergebnis haben.

Die Gravitation *g* ist als positiv angegeben, somit interessiert uns der Nenner vom Vorzeichen nicht (es bleibt im Gesamten gleich) – Es bleibt also beim oben gefundenen Vorzeichen.

Negative Zeiten sind aber nach Aufgabe für t_1 nicht vorgesehen!

Der Ausdruck $v_0 - \sqrt{v_0^{\ 2} - 2 \cdot g \cdot s}$ liefert aber ganz sicher (aus den gleichen, aber umgekehrten, Gründen) ein positives Ergebnis, jetzt können wir auch durch das richtige t_1 unserer Lösung angeben – Wir müssen deshalb addieren um ein positives Ergebnis zu erhalten. Und das ist das Ergebnis von Teilaufgabe b):

$$t_1 = \frac{-(-v_0) + \sqrt{(-v_0)^2 - 2 \cdot g \cdot s}}{g}\ ,\ \mathrm{g} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^{\ 2} - 2 \cdot g \cdot s}}{g}\ ,\ \mathrm{g} \neq 0$$

c) Das wurde bereits in Teilaufgabe b) ansatzweise besprochen bzw. angedacht.

Man macht sich das das leicht klar, wenn man sich vorstellt, einen massebehafteten Körper in Richtung der Wirkung der Gravitation abwirft. Dieser Körper kommt im wahren Leben nur einmal am Punkt P_1 vorbei, da die stetige Beschleunigung der Gravitation auf ihn wirkt – Wir haben ja kein Jojo.

Damit kann es schon von der Anschauung her keine zwei Zeitpunkte für t_1 geben.

Weil die Gravitation nach Aufgabe wirkt, muss er aber am darunter liegenden Punkt P_1 irgendwann vorbei fallen – Also gibt es nur einen einzigen Zeitpunkt.

Der mathematische Ansatz bietet nach Teilaufgabe b) aber noch eine zweite Lösung an, die allerdings eine negative Zeit bedingen würde und das ist in der Aufgabenstellung ausgeschlossen.

d) Das Umkehren des Vorzeichens von v_0 würde bedeuten, dass der Körper nach oben abgeworfen wird.
Die Gravitation wirkt dem aber entgegen und beschleunigt ihn in Gegenrichtung zu seiner ursprünglichen Bewegung. D.h. sein Steigflug wird gebremst bzw. negativ beschleunigt.
Deswegen wird seine Geschwindigkeit irgendwann relativ zu P_0 Null und er beschleunigt umgekehrt wieder in Richtung der wirkenden Gravitation.

Im Moment wo die relative Geschwindigkeit zu Null wird, hat der Körper seinen Scheitelpunkt erreicht und erreicht, aufgrund seiner nun fehlenden kinetischen Energie, keine größere Höhe mehr. Nach diesem Punkt wird auch die Aufgabe nicht mehr real lösbar, d.h. die Diskriminante wird negativ und die Wurzelbildung ist im reellen Zahlenraum nicht mehr möglich.

Die Höhe des Scheitelpunktes lässt sich alleine aus der Diskriminante der in b) genannten Wurzel bestimmen, denn hier muss eine Doppellösung der Gleichung und somit die Diskriminante Null sein.

Für das Erreichen des Scheitelpunkts P_S (Höhe: s_S) gilt somit:
$\frac{{v_0}^2}{2 \cdot g} = s_S$ oder die dafür nötige Zeit t_S errechnet man durch Einsetzen in die in Teilaufgabe b) gefundene Formel.

Für zwischen P_0 und P_S liegende Punkte gibt es stets zwei Zeitpunkte, wo eine dazwischen liegende Höhe erreicht wird, denn zuerst erreicht der Körper den Punkt beim Aufsteigen und etwas Zeit danach beim Absteigen. Hier liefert die in Teilaufgabe b) gefundene Gleichung zwei mögliche positive Zeitpunkte.

Die zeitlich erste Lösung muss also beim Zeitpunkt des Aufsteigens gewesen sein, während der die zweite (physikalisch spätere) Lösung der Gleichung den Zeitpunkt beim Herabfallen beschreibt.

Wenn die kinetische Energie nicht ausreicht um den Körper bis zu einer an gedachten Höhe anzuheben, dann wird die Diskriminante negativ und es gibt keine reale Lösung. Das entspricht der normalen Vorstellung und ist auch so.

Allerdings gibt es aus dieser Überlegung heraus auch den Ansatz, dass man die Lösung über den Energieerhaltungssatz angeht.